Goethe-Gymnasium Bensheim
Fachschaft Mathematik
Hilde Zirkler

Bensheim, im Juli 2006

Übergang Klasse 10 / Klasse 11

Mathematik

Übungsaufgaben zum Mittelstufenstoff im Fach Mathematik

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen
2. Systeme linearer Gleichungen
3. Reelle Zahlen
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
5. Potenzen
6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen
7. Wachstumsprozesse
8. Exponential- und Logarithmengleichungen
9. Flächen- und Körperberechnungen
10. Trigonometrie

Lernhilfen

- Die am Goethe-Gymnasium eingeführten Mathematikbücher der Klassen 8, 9 10

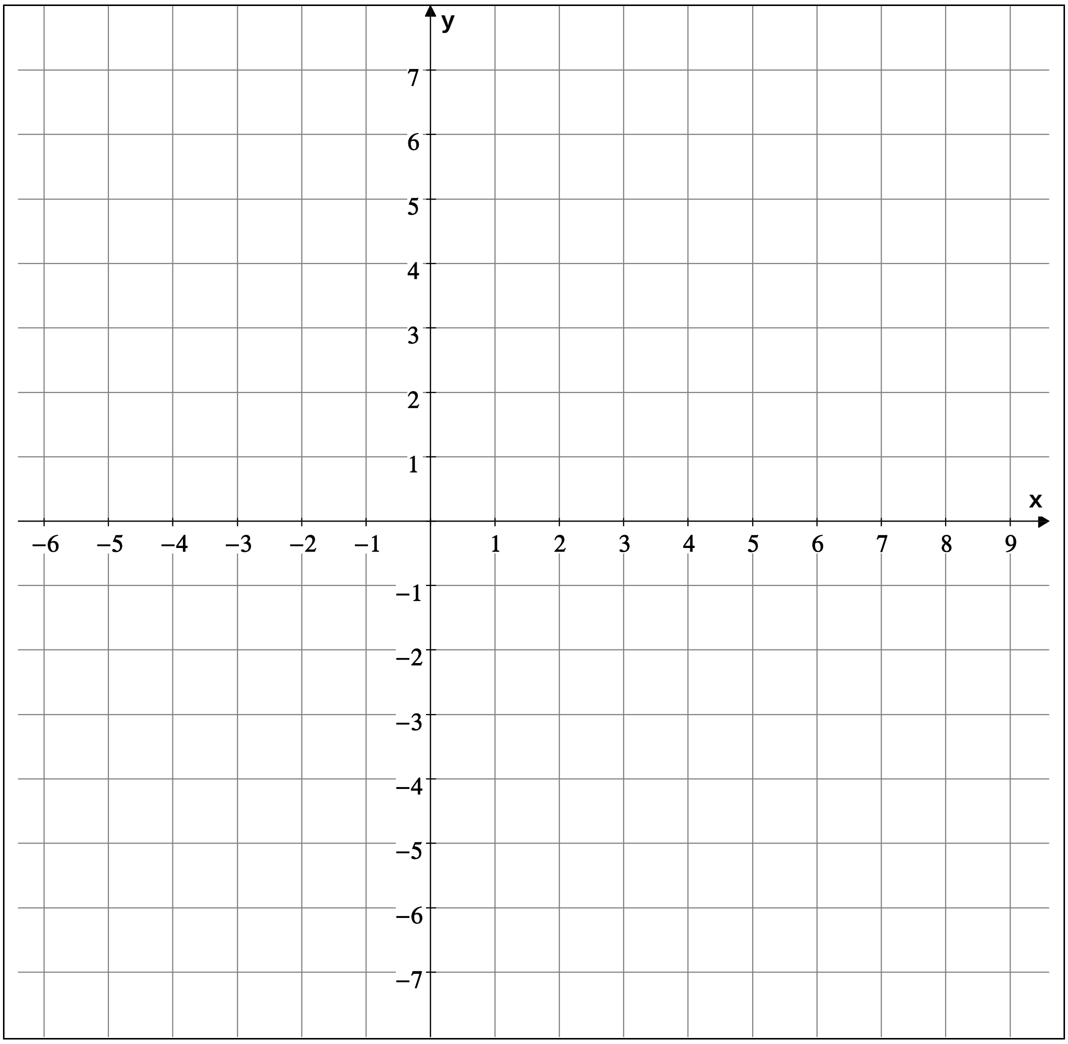
- Alle anderen Schulbücher zu diesen Klassenstufen (z.B. aus den Verlagen Klett, Schroedel, Cornelsen, bsv, …)
- Lernhilfen der Verlage (z.B. Training Mathematik aus dem Klett Verlag, Traingshefte von Schroedel, Nachschlagewerke von Duden-Paetec, …)
- Formelsammlungen Mathematik (z.B. Schulformelsammlungen; „Das große Tafelwerk“ –Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II für die Fächer Mathematik, Informatik, Astronomie, Physik, Chemie, Biologie aus dem Verlag Cornelsen, …)

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

Aufgabe 1

Zeichne die Gerade g mit $y = \frac{3}{5}x + 2$ und die Gerade h durch die Punkte $P(0 \mid -3)$ und $Q(5 \mid -1)$ in das unten stehende Koordinatensystem ein.

a. Bestimme die Gleichung der Geraden h.
b. Bestimme für die Geraden g und h die Schnittpunkte mit den beiden Achsen rechnerisch. Bestimme auch den Schnittpunkt S_1 der Geraden g und h.
c. Zeichne die Parallele p zur Geraden g durch den Punkt $R(0 \mid -1)$. Gib die Gleichung dieser Geraden p an. Bestimme den Schnittpunkt S_2 der Geraden p und h.
d. Liegt der Punkt $T(-5 \mid 5)$ auf einer der drei Geraden ? Mache jeweils die Punktprobe.
e. Gib die fehlenden Koordinaten so an, dass die Punkte $A(25 \mid ?)$ und $B(? \mid 500)$ auf der Geraden g liegen.



Aufgabe 2

a. Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die zu Beginn 50cm lange brennt pro Stunde 5cm ab, die 40cm lange 3cm. Wie lange dauert es, bis sie gleich lang sind?

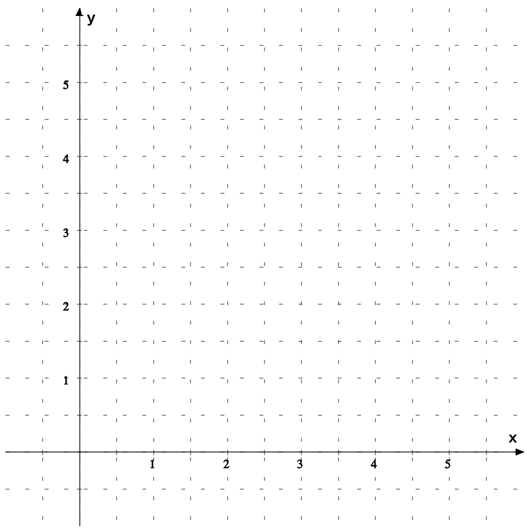
b. Die Brüder Uwe und Carsten besuchen die gleiche Schule. Uwe fährt mit dem Fahrrad mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h, Carsten geht zu Fuß mit einer Geschwindigkeit von 5 km /h. Wenn Carsten 20 min. vor Uwe von zu Hause losgeht, sind sie gleichzeitig in der Schule. Welche Zeit benötigen die beiden für ihren Schulweg und wie viel Kilometer beträgt ihr Schulweg?

2. Systeme linearer Gleichungen

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 2x + y = 4 \\ \text{II)} \quad & -x + 2y = 1 \end{aligned}$$



a. Welche Schaubilder ergeben sich bei der graphischen Interpretation dieses linearen Gleichungssystems ?
b. Zeichne die Schaubilder in das neben stehende Koordinatensystem ein und lies den Schnittpunkt ab.
c. Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems auch rechnerisch.
d. Gib die Gleichung einer Geraden an, die keinen Schnittpunkt mit dem Schaubild zur Gleichung I) hat.

Aufgabe 2

a. Löse das LGS mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens und mache danach die Probe.

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 3x - 2y = 4 \\ \text{II)} \quad & x + 2y = 8 \end{aligned}$$

b. Vereinfache zunächst die Gleichungen des linearen Gleichungssystems und löse dieses System dann mit Hilfe des Additionsverfahrens. Gib die Lösungsmenge an.

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 2 \cdot (x - 2y) - 5x = -7y + 3 \\ \text{II)} \quad & -x + 4y + 35 = 2 \cdot (y + 5) + 4x \end{aligned}$$

c. Löse das lineare Gleichungssystem. Die Lösungsvariablen seien x und y, die Formvariable sei a.

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 2ax + 3y = 7 \\ \text{II)} & 4ax + 5y = 12 \end{array}$$

Welche Bedingung muss die Formvariable a erfüllen, damit das Gleichungssystem genau eine Lösung hat ?

Aufgabe 2

a. Gesucht sind zwei Zahlen mit folgender Eigenschaft :
Subtrahiert man vom Vierfachen der ersten Zahl das Dreifache der zweiten Zahl, erhält man die Summe der beiden Zahlen. Subtrahiert man die zweite Zahl von der ersten Zahl, erhält man 1.

b. In einem Dreieck ist ein Innenwinkel um 30° größer als ein anderer. Der dritte Winkel ist halb so groß wie der erste.
Wie groß sind die drei Winkel ?

3. Reelle Zahlen

Aufgabe 1

a. Berechne möglichst einfach. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75} =$ 2. $\sqrt{13} : \sqrt{52} =$ 3. $\sqrt{\frac{63}{20}} : \sqrt{\frac{7}{5}} =$

b. Ziehe teilweise die Wurzel. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{405} =$ 2. $\sqrt{a^2 b} =$

c. Mache den Nenner rational. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\frac{18}{\sqrt{90}} =$ 2. $\frac{14}{\sqrt{7}} =$

Aufgabe 2

a. Wende die binomische Formel an und vereinfache dann : $(\sqrt{14} - \sqrt{56})^2 =$

b. Löse die beiden Wurzelgleichungen und mache die Probe.
Gib danach die Lösungsmenge an.

1. $\sqrt{3x - 7} = \sqrt{x + 1}$

2. $-\sqrt{5x + 4} = -12$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

1. Gegeben sind die quadratischen Funktionen mit

   (1) $y = -3x^2 - 6x$ (2) $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$

   Gib für beide Parabelgleichungen die Scheitelpunktform und den Scheitel an.
   Zeichne die beiden Parabeln so genau wie möglich.

S (|)

S (|)

2. Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g mit den Funktionsgleichungen

   p: $y = -x^2 + 2x + 8$ und g: $y = x + 6$

   1. Berechne für die Parabel p und für die Gerade g die Schnittpunkte mit der x-Achse. Nenne diese Schnittpunkte N_1, N_2 und N_3.
   2. Bestimme den Scheitelpunkt S der Parabel. Bestimme den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse und nenne ihn C.
   3. Zeichne die Parabel p und die Gerade g in das gegebene Koordinatensystem.
   4. Die Parabel p schneidet die Gerade g in den Punkten S_1 und S_2. Berechne diese Schnittpunkte.

3. Quadratische Gleichungen können wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, mit der pq-Formel oder mit der abc-Formel lösen.

abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$x_{1/2}$ =

pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

$x_{1/2}$ =

Gegeben ist nun die quadratische Gleichung $-7x^2 + 42x + 945 = 0$.

a. Löse die Gleichung mit der abc-Formel.

a =	b =	c =

b. Löse die Gleichung mit der pq-Formel. Bringe die Gleichung zuerst auf die Normalform.

Normalform : ______________________

p =	q =

c. Löse die Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

4. Löse die Gleichungen mit der abc-Formel.
   Bringe die Gleichungen zunächst auf die Form $a x^2 + b x + c = 0$
   a. $12x^2 + 2x = 9x^2 + 9x - 2$ b. $x(3x-7) = (x+2)^2 + x - 4$

5. Löse die Gleichungen mit der pq-Formel.
   Bringe die Gleichungen zunächst auf die Form $x^2 + p x + q = 0$

   a. $x^2 = 4x - 3$ b. $11x = 3 + 30x^2$ c. $8x + 17 = 1 - x^2$

5. Potenzen

1. Berechne bzw. vereinfache. Wende die Potenzgesetze an.
   a. $-10 \cdot 6^{14} + 5{,}8 \cdot 6^{14}$ b. $12^9 \cdot 12^{13}$

   c. $a^{9k+7} : a^{8+10k}$ d. $\dfrac{(5x^2 - 405)^3}{25(9+x)^3}$

   e. $2^{xy} \cdot 3^{xy}$ f. $\dfrac{144^{3y}}{150^{3y}} : \dfrac{48^{3y}}{25^{3y}}$

2. Berechne und formuliere (auch in Worten) das zugehörige allgemeine Potenzgesetz.

   a. $(7^{-2})^9 =$ b. $(x^{5xy})^{0{,}4xy} =$

3. Berechne mit dem Taschenrechner und gib das Ergebnis in der Normdarstellung an. Runde dabei auf 3 Stellen nach dem Komma. $\dfrac{4{,}75^3 \cdot \sqrt[13]{29^7} - 65{,}38^4}{3 \cdot 1{,}25^7 - 47{,}2^3} =$

4. Vier Würfel mit dem Volumen $10 cm^3$ werden zu einem neuen Würfel zusammengeschmolzen.
   Welche Oberfläche hat dieser neue Würfel ?

6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen

1. Wir betrachten Funktionen des Typs $f: x \mapsto a x^n$; $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   a. Gegeben sind die Funktionen f_1 bis f_5 .

   $f_1 : x \mapsto -2x$; $x \in IR$ $f_4 : x \mapsto \frac{1}{10}x^4$; $x \in IR$

   $f_2 : x \mapsto 0{,}5x^2$; $x \in IR$ $f_5 : x \mapsto -\frac{1}{10}x^5$; $x \in IR$

   $f_3 : x \mapsto -\frac{1}{4}x^3$; $x \in IR$

Lege eine Wertetabelle an und zeichne die Schaubilder der Funktionen f_1 , f_3 und f_5 in geeignete Koordinatensysteme.

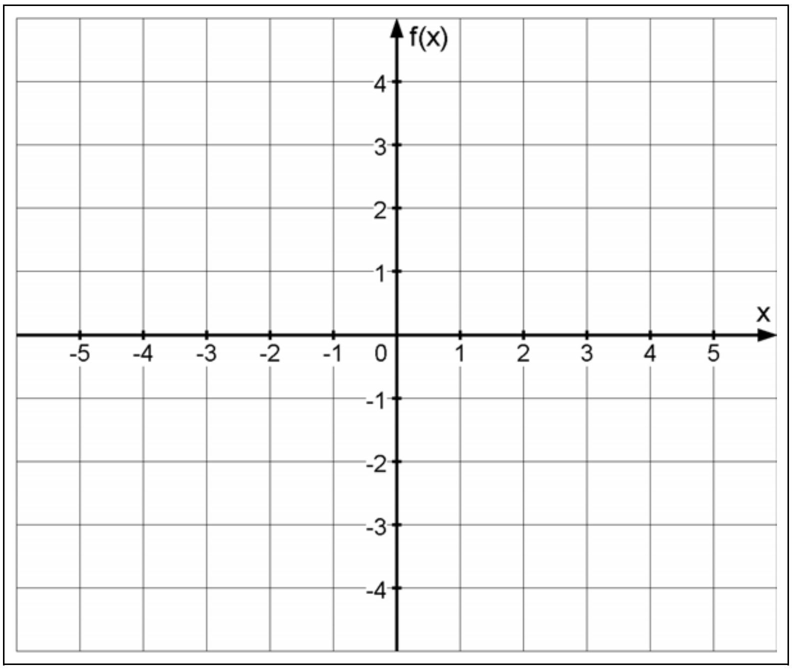
b. Welche Eigenschaften haben die betrachteten Funktionen ?

2. Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = -\frac{15}{x^3}$ und f_2 mit $f_2(x) = 0{,}4^x$.

a. Definitionsmengen f_1 : $\boxed{D_1 = \qquad}$ f_2 : $\boxed{D_2 = \qquad}$

b. Fülle die Wertetabelle aus und zeichne danach die Schaubilder in ein gemeinsames Koordinatensystem.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f_1(x)$											
$f_2(x)$											



c. Beschreibe für beide Funktionen das Verhalten der Schaubilder für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 0$.

7. Wachstumsprozesse.

1. Es liege ein exponentieller Wachstumsprozess vor. Bestimme jeweils den Wachstumsfaktor q für die folgenden Wachstumsangaben pro Zeiteinheit :

a. 25 % q =

b. 0,5 % q =

c. eine Zunahme um zwei Zehntel q =

d. eine Abnahme um drei Achtel q =

2. Ein Waldstück wird von einer Krankheit befallen. Dadurch nimmt die Anzahl der gesunden Bäume exponentiell ab. Zu Beginn der Beobachtung konnte man noch 5000 gesunde Bäume zählen, nach einem Monat waren es nur noch 4000 gesunde Bäume.

   a. Bestimme den Wachstumsfaktor q und gib die Gleichung für diese Abnahme an.
   Die Zeiteinheit soll ein Monat sein.
   (Die Monate sollen in den weiteren Aufgabenstellungen mit 30 Tagen gerechnet werden.)

q =

   b. Wie nennt man diese Art des Wachstums ?
   c. Wie viele gesunde Bäume wird es nach vier Monaten noch geben ?
   d. Nach welcher Zeit werden es nur noch 100 gesunde Bäume sein ?
   e. Wie viele gesunde Bäume gab es 7 Tage nach dem Beginn der Beobachtung ?
   f. Das Waldstück ist schon seit einiger Zeit von dieser Krankheit befallen.
   Wie viele gesunde Bäume gab es zwei Monate vor dem Beginn der Beobachtung ?

8. Exponential- und Logarithmengleichungen

1. Löse die folgenden Gleichungen. Runde auf 4 Dezimalen.

   a. $13{,}5^{x} = 500$ b. $13^{-x} = 111$ c. $5{,}2 \cdot 9{,}2^{x} = 323{,}45$
   d. $1{,}3 \cdot 0{,}95^{2x-1} = 47{,}5$ e. $9^{5x+7} - 67{,}2 = 9^{5x+5}$

   Die Basis der Logarithmen sei 10.

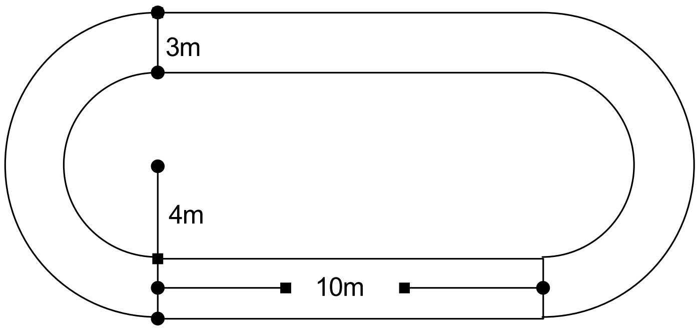
   f. $\lg (7 - 3{,}8x) = 3{,}15$ g. $\lg x + \lg (x + 1) = 0$

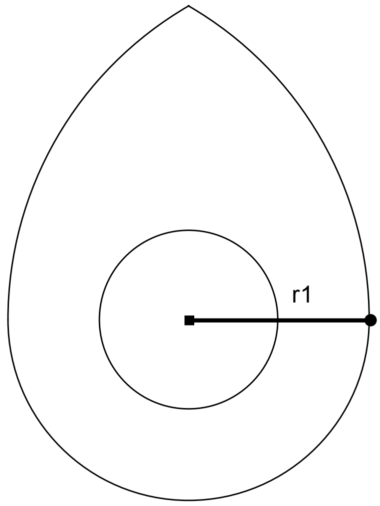
2. Radioaktives Plutonium 239 hat eine Halbwertszeit von etwa 24400 Jahren.
   a. Was versteht man unter dem Begriff Halbwertszeit ?
   b. Bestimme den Wachstumsfaktor q. Dokumentiere alle Rechenschritte.
   [zur Kontrolle : 0,9999716]
   c. Eine Tonne Plutonium 239 aus einem Kernkraftwerk soll eingelagert werden.
   Wie viele Kilogramm Plutonium 239 sind nach 100000 Jahren noch vorhanden ?
   d. Nach wie vielen Jahren findet man nur noch ein Kilogramm Plutonium 239 ?

9. Flächen- und Körperberechnungen

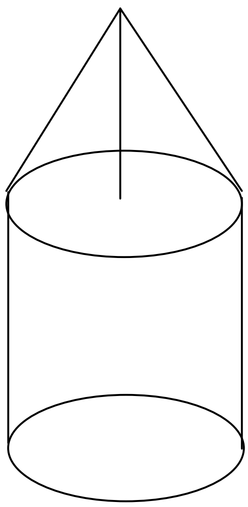
1. a. Berechne den Flächeninhalt der unten gezeichneten Laufstrecke.

   b. Berechne den Inhalt der markierten Fläche.
   Der Radius des inneren Kreises ist halb so groß wie r_1.
   $r_1 = 5\text{cm}$





2.



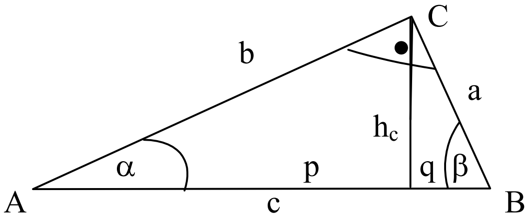
Trage zunächst die Bezeichnungen für alle wichtigen Größen ein :
Höhe des Zylinders h_{Zyl} , Höhe des Kegels h_{Kegel} , Radius des Grundkreises r , Mantellinie s des Kegels, rechte Winkel

Gegeben : $s = 10$ m , $h_{Zyl} = 10$ m , $M_{Zyl} = 300\ m^2$

Gesucht : r , V_{Kegel} , V_{Zyl} , V_{ges} , M_{Kegel} , Oberfläche des Körpers O

10. Trigonometrie

1.



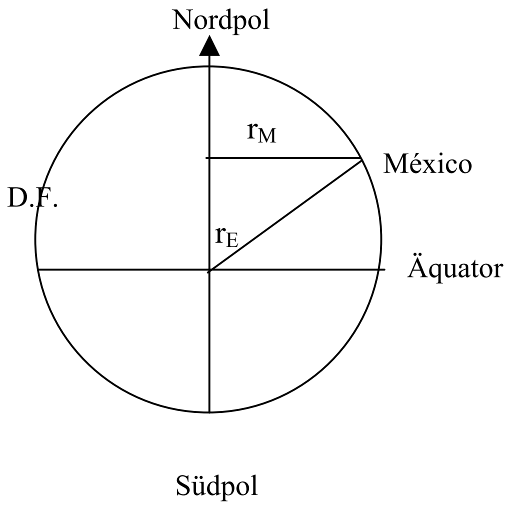
Berechne die fehlenden Größen im Dreieck ABC.

gegeben : b = 15 m
$\beta = 50°$

2. Mexiko-Stadt liegt auf dem 20. Breitengrad nördlicher Breite.
Berechne den Radius r_M und den Umfang des zugehörigen Breitenkreises.

Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich Mexiko-Stadt um die Erdachse ?
Rechne mit dem Erdradius $r_E = 6\,378$ km

Hilfe : Ein Ort liegt auf dem 20. Breitengrad, wenn der Winkel φ in der Skizze 20° beträgt.



3. Durch einen Berg soll ein geradliniger Straßentunnel von A nach C gebaut werden. Um seine Länge zu bestimmen, misst man

$\overline{AB} = 911{,}5$ m , $\overline{BC} = 1\,884{,}3$ m und
$\measuredangle\, CBA = 115°$.

Berechne die Tunnellänge und die Winkel
$\measuredangle\, BAC$ und $\measuredangle\, ACB$.