Goethe-Gymnasium Bensheim
Fachschaft Mathematik
Hilde Zirkler

Bensheim, im Juni 2007

Übergang Klasse 10 / Klasse 11

Mathematik

Übungsaufgaben zum Mittelstufenstoff im Fach Mathematik

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen
2. Systeme linearer Gleichungen
3. Reelle Zahlen
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
5. Potenzen
6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen
7. Wachstumsprozesse
8. Exponential- und Logarithmengleichungen
9. Flächen- und Körperberechnungen
10. Trigonometrie

Lernhilfen

- Die eingeführten Mathematikbücher der Klassen 8, 9 10

- Alle anderen Schulbücher zu diesen Klassenstufen (z.B. aus den Verlagen Klett, Schroedel, Cornelsen, bsv, …)
- Lernhilfen der Verlage (z.B. Training Mathematik aus dem Klett Verlag, Trainingshefte von Schroedel, Nachschlagewerke von Duden-Paetec, …)
- Formelsammlungen Mathematik (z.B. Schulformelsammlungen; „Das große Tafelwerk“ –Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II für die Fächer Mathematik, Informatik, Astronomie, Physik, Chemie, Biologie aus dem Verlag Cornelsen, …)

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen; Terme

Aufgabe 1

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-2|5)$ und $B(4|2)$. Die Gerade h ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung 2.

a. Zeichne die Geraden g und h in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
b. Bestimme die Gleichungen der Geraden g und h.
c. Die Geraden g und h bilden zusammen mit der x-Achse ein Dreieck.
   Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
d. Liegt der Punkt $C(20|-6)$ auf einer der beiden Geraden?
   Mache jeweils die Punktprobe.
e. Gib die fehlende Koordinate so an, dass der Punkt $D(\,?\,|-107)$ auf der Geraden g liegt.

Aufgabe 2

a. Familie Müller kauft einen Bauplatz und ein angrenzendes Waldstück.
   Das Waldstück ist $650m^2$ größer als die Hälfte des Bauplatzes. Für den Bauplatz und das Waldstück zusammen wird der Flächeninhalt $1490m^2$ angegeben.
   Berechne die Flächeninhalte des Bauplatzes und des Waldstücks.
b. Ein benachbarter Weinberg hat die Form eines Rechtecks. Eine Seite des Rechtecks ist dreimal so lang wie die andere.
   Durch eine Flurbereinigung werden die beiden längeren Seiten um 10m verkürzt, die beiden kürzeren Seiten dafür um 10m verlängert. Der Flächeninhalt des Weinbergs wächst dabei um $300m^2$.
   Bestimme die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks durch eine geeignete Rechnung.

2. Systeme linearer Gleichungen

Aufgabe 1

a. Löse das LGS mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens und mache danach die Probe.
   I) $5x - 7y = 32$
   II) $3x - y = 8$

b. Wie kann man das oben stehende LGS graphisch interpretieren? Wähle eine geeignete Darstellungsform und erläutere diese.

c. Vereinfache zunächst die Gleichungen des linearen Gleichungssystems und löse dieses System dann mit Hilfe des Additionsverfahrens. Gib die Lösungsmenge an.
   I) $(2x - 1) \cdot (2y + 4) = 4xy - 15$
   II) $(x + 5) \cdot (x - 5) + 3x = x^2 - 4y - 22$

d. Löse das lineare Gleichungssystem. Die Lösungsvariablen seien x und y, die Formvariable sei a.
   I) $ax + 2y = 5$
   II) $3ax + 4y = 5$

   Welche Bedingung muss die Formvariable a erfüllen, damit das Gleichungssystem genau eine Lösung hat ?

Aufgabe 2

a. In einer Lostrommel befinden sich grüne und rote Lose. Ein grünes Los kostet 2€, ein rotes Los kostet 4€. Felix zieht mit verbundenen Augen 10 Lose und zahlt dafür 34€. Bestimme die Anzahl der grünen und der roten Lose.
b. Eine Großmutter und ihre Enkelin sind zusammen 99 Jahre alt. Die Großmutter ist achtmal so alt wie ihre Enkelin. Bestimme das Alter der Großmutter und das Alter der Enkelin.

3. Reelle Zahlen

Aufgabe 1

a. Berechne möglichst einfach. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{26} \cdot \sqrt{104} =$ 2. $\sqrt{17} : \sqrt{68} =$ 3. $\sqrt{\frac{8}{9}} : \sqrt{\frac{2}{9}} =$

b. Ziehe teilweise die Wurzel. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{175} =$ 2. $\sqrt{x^3 y^4} =$

c. Mache den Nenner rational. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\frac{9}{\sqrt{72}} =$ 2. $\frac{10}{\sqrt{5}} =$

Aufgabe 2

Löse die beiden Wurzelgleichungen und mache die Probe.
Gib danach die Lösungsmenge an.

a. $x + \sqrt{x-1} = 13$
b. $4 + 2x = x - 1 + \sqrt{x+5}$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g mit den Funktionsgleichungen

$p: \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ und $g: \quad y = -x + 1$

a. Berechne für die Parabel p und für die Gerade g die Schnittpunkte mit der x-Achse. Nenne diese Schnittpunkte N_1, N_2 und N_3.
b. Bestimme den Scheitelpunkt S der Parabel. Bestimme den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse und nenne ihn C.
c. Zeichne die Parabel p und die Gerade g in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
d. Die Parabel p schneidet die Gerade g in den Punkten S_1 und S_2. Berechne diese Schnittpunkte.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen können wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, mit der pq-Formel oder mit der abc-Formel lösen.

abc-Formel	**pq-Formel**
$a x^2 + b x + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$
$\mathbf{x_{1/2}} =$	$\mathbf{x_{1/2}} =$

Gegeben ist nun die quadratische Gleichung $5x^2 + 70x + 245 = 0$.

a. Löse die Gleichung mit der abc-Formel. a = b = c =

b. Löse die Gleichung mit der pq-Formel. Bringe die Gleichung zuerst auf die Normalform.

Normalform : ______________________ p = q =

Aufgabe 3

Löse die Gleichungen mit der abc-Formel oder mit der pq-Formel.

a. $1 = 3x(5 - x) + 19$ b. $(3y + 1)(y + 2) = (1 - y)^2 + 6$

5. Potenzen

1. Berechne bzw. vereinfache. Wende die Potenzgesetze an.

   a. $-12 \cdot 5^{14} + 7{,}8 \cdot 5^{14}$

   b. $22^9 \cdot 22^{11}$

   c. $(5^{-3})^5$

   d. $(h^{6xy})^{0{,}5xy} =$

   e. $2^{abc} \cdot 5^{abc}$

   f. $\dfrac{170^{4y}}{143^{4y}} : \dfrac{34^{4y}}{39^{4y}}$

2. Berechne und formuliere (auch in Worten) das zugehörige allgemeine Potenzgesetz.

   a. $a^{6k+9} : a^{8+11k}$

   b. $\dfrac{(2x^2 - 50)^3}{8(x+5)^3}$

3. Berechne mit dem Taschenrechner und gib das Ergebnis in der Normdarstellung an. Runde dabei auf 3 Stellen nach dem Komma.

   $$\frac{2{,}75^5 \cdot \sqrt[13]{29^4} - 5{,}38^4}{3 \cdot 1{,}25^7 - 17{,}2^3} =$$

4. Zehn Kugeln mit dem Radius 10cm werden zu einer einzigen neuen Kugel zusammengeschmolzen.
   Berechne den Radius dieser neuen Kugel.

6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Wir betrachten Funktionen des Typs $f: x \mapsto a x^n \; ; \; x \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

a. Gegeben sind die Funktionen f_1 bis f_5.

$f_1 : x \mapsto -3x \; ; \; x \in IR$

$f_2 : x \mapsto 0{,}25x^2 \; ; \; x \in IR$

$f_3 : x \mapsto -\frac{1}{5}x^3 \; ; \; x \in IR$

$f_4 : x \mapsto \frac{1}{20}x^4 \; ; \; x \in IR$

$f_5 : x \mapsto -\frac{1}{10}x^5 \; ; \; x \in IR$

Lege eine Wertetabelle an und zeichne die Schaubilder der Funktionen f_1 bis f_5 in ein geeignetes Koordinatensystem.

b. Nenne Eigenschaften der oben stehenden Funktionen.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = \frac{15}{x^3}$ und f_2 mit $f_2(x) = -0{,}4^x$.

a. Definitionsmengen f_1 : $\boxed{D_1 = \quad}$ f_2 : $\boxed{D_2 = \quad}$

b. Lege eine Wertetabelle an und zeichne danach die Schaubilder in ein gemeinsames Koordinatensystem.

c. Beschreibe für beide Funktionen das Verhalten der Schaubilder für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 0$.

7. Wachstumsprozesse

Aufgabe 1

Es liege ein exponentieller Wachstumsprozess vor. Bestimme jeweils den Wachstumsfaktor q für die folgenden Wachstumsangaben pro Zeiteinheit :

a. 15 % q =

b. 0,8 % q =

c. eine Zunahme um zwei Fünftel q =

d. eine Abnahme um drei Viertel q =

Aufgabe 2

Ein Bienenvolk wird von einer Krankheit befallen. Dadurch nimmt die Anzahl der Bienen exponentiell ab. Zu Beginn der Beobachtung konnte man noch 50 000 Bienen zählen, nach 24 Stunden waren es nur noch 40 000.

a. Bestimme den Wachstumsfaktor q für die Zeiteinheit 1 Tag.
   Gib die Gleichung für die zahlenmäßige Verringerung des Bienenvolks an.
   Wie nennt man diese Art des Wachstums?
b. Wie viele Bienen wird es nach einer Woche noch geben?
c. Wie viele Bienen wird es drei Stunden nach Beobachtungsbeginn noch geben?
d. Nach welcher Zeit wird das Bienenvolk nur noch aus 1000 Bienen bestehen?
e. Das Bienenvolk ist schon seit einiger Zeit von dieser Krankheit befallen.
   Wie viele Bienen gab es fünf Tage vor dem Beginn der Beobachtung?

8. Exponential- und Logarithmengleichungen

Aufgabe 1

Löse die folgenden Gleichungen. Runde auf 4 Dezimalen.

a. $3{,}5^{x} = 200$ b. $25^{-x} = 1000$ c. $3{,}2 \cdot 19{,}2^{x} = 623{,}45$

d. $4{,}3 \cdot 0{,}95^{3x-1} = 77{,}5$ e. $2^{6x+3} + 57{,}5 = 2^{6x+5}$

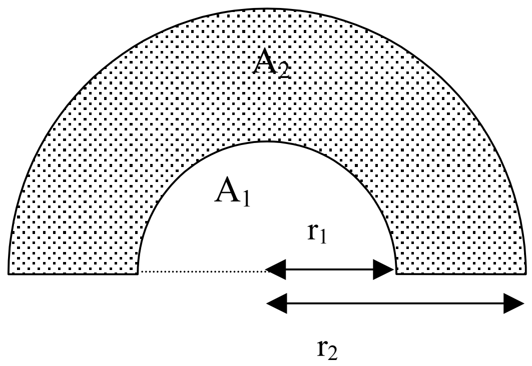
Die Basis der Logarithmen sei 10.
f. $\lg(5 - 3{,}8x) = 1{,}5$ g. $\lg(x^2 + 2x) - \lg(x + 2) = 1$

Aufgabe 2

Altersbestimmung mit der C-14-Methode.
Radioaktiver Kohlenstoff (C-14) hat eine Halbwertszeit von etwa 5730 Jahren.
a. Was versteht man unter dem Begriff Halbwertszeit ?
b. Bestimme den Wachstumsfaktor q. Dokumentiere alle Rechenschritte.
   [zur Kontrolle : 0,9998790]
c. 1g Kohlenstoff eines lebenden Organismus hat eine Aktivität von 12,88Bq.
   Bestimme das Alter der Mumie Tutenchamuns, wenn die Aktivität von 1g Kohlenstoff dieser Mumie nur noch 8,66Bq beträgt.

9. Flächen- und Körperberechnungen

Aufgabe 1

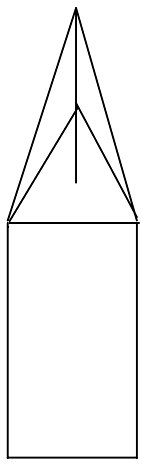


a. Für welche Radien haben die weiße und die schraffierte Fläche den gleichen Flächeninhalt?
Rechne zunächst allgemein mit r_1 und r_2.
Wie groß ist r_2, wenn $r_1 = 3$ cm ist ?

b. Zeichne die Figur für die angegebenen Radien.

c. Berechne den Flächeninhalt A_2 der schraffierten Fläche.
Berechne den Umfang der schraffierten Fläche.

Aufgabe 2



Der Körper besteht aus einem dreiseitigen Prisma mit aufgesetztem Tetraeder.
Die Grundfläche des Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a.

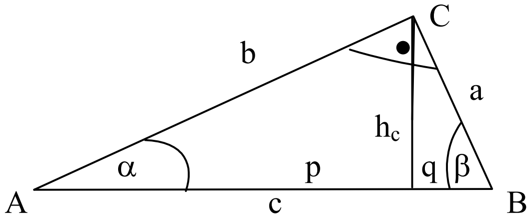
Trage zunächst die Bezeichnungen für alle wichtigen Größen ein:
Höhe des Prismas h_{Prisma} , Seitenkante der Pyramide s , Höhe der Pyramide h_{Pyr} , Höhe eines Seitendreiecks h_1 , Dreiecksseite a , rechte Winkel

Gegeben: $V_{Pyr} = 500 \text{ cm}^3$, $A_{Dreieck} = 50 \text{ cm}^2$,
$A_{Rechteck} = 100 \text{ cm}^2$

Gesucht: h_{Pyr} , a , V_{Prisma} , Volumen V_{ges} ,
Oberfläche des Körpers O

10. Trigonometrie

Aufgabe 1



Berechne die fehlenden Größen im Dreieck ABC.

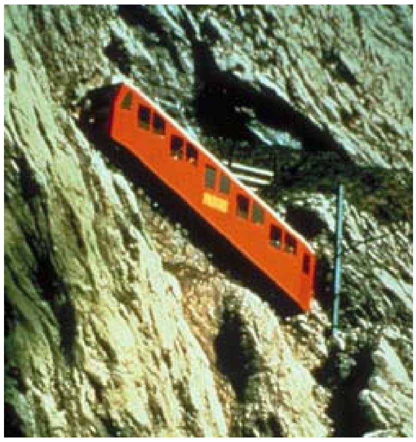
gegeben : a = 15 m
$\alpha = 30°$

Aufgabe2

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen für die Seiten und Winkel.
$b = 6cm$, $c = 7cm$, $\alpha = 110°$.

a. Konstruiere das Dreieck ABC.
b. Berechne die übrigen Winkelgrößen und die Seitenlänge a.
c. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Aufgabe 3



Die Pilatus-Bahn in der Schweiz ist bis heute die steilste Zahnradbahn der Welt. Auf 4618m Streckenlänge überwindet sie einen Höhenunterschied von 1634m.

a. Welcher durchschnittliche Steigungswinkel und welche Steigung (Angabe in Prozent) ergeben sich aus den oben genannten Daten?

b. Die maximale Steigung dieser Strecke beträgt 48%. Auf welche Länge könnte man die Bahnstrecke verkürzen, wenn diese maximale Steigung für die Gesamtstrecke möglich wäre?

Unterstütze deine Rechnungen durch eine geeignete Skizze.

Aufgabe 4

Gib alle Winkel zwischen 0° und 360° an, für die gilt:

a. $\tan\alpha = -1,5$
b. $\cos\alpha < 0$ und $\sin\alpha > 0$

Unterstütze deine Überlegungen durch Skizzen am Einheitskreis.