Fachberatung Mathematik
Hilde Zirkler
Goethe-Gymnasium Bensheim Bensheim, im Juni 2008

Übergang Klasse 10 / Klasse 11
Mathematik

Übungsaufgaben zum Mittelstufenstoff im Fach Mathematik

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen
2. Systeme linearer Gleichungen
3. Reelle Zahlen
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
5. Potenzen
6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen
7. Wachstumsprozesse
8. Exponential- und Logarithmengleichungen
9. Flächen- und Körperberechnungen
10. Trigonometrie

Lernhilfen

- Die eingeführten Mathematikbücher der Klassen 8, 9 und 10
  Alle anderen Schulbücher zu diesen Klassenstufen (z.B. aus den Verlagen Klett, Schroedel, Cornelsen, bsv, …)
- Lernhilfen der Verlage (z.B. Training Mathematik aus dem Klett Verlag, Trainingshefte von Schroedel, Cornelsen, Nachschlagewerke von Duden-Paetec, …)
- Formelsammlungen Mathematik (z.B. Formelsammlung „Das große Tafelwerk“ – Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II für die Fächer Mathematik, Informatik, Astronomie, Physik, Chemie, Biologie aus dem Cornelsen Verlag; das entsprechende Werk aus dem Verlag Duden-Paetec; Formelsammlungen Mathematik von Duden, Schroedel, Klett, …)

Termine

1. Bearbeitung der Aufgaben bis zum 22. August 2008
2. Bekanntgabe der Lösungen ab 22. August 2008 durch die Fachlehrer
   (auch bei: www.mathe-fachberater.de)
3. Vorläufiger Termin für den Test: Freitag, 29. August 2008, 3./4. Stunde

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen; Terme

Aufgabe 1

Die Gerade g ist eine Ursprungsgerade, die durch den Punkt $P(3 \mid 4)$ verläuft. Die zu g parallele Gerade h verläuft durch den Punkt $Q(9 \mid 8)$.
Zeichne die Geraden g und h in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

a. Bestimme die Gleichungen der Geraden g und h.
b. Eine Parallele zur x-Achse verläuft durch den Punkt P. Diese Parallele, die x-Achse und die beiden Geraden g und h begrenzen ein Parallelogramm.
   Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Parallelogramms.
c. Der Punkt Z liegt auf der Mittelparallelen der Geraden g und h. Der Punkt Z und die Schnittpunkte der Geraden g und h mit der x-Achse bilden ein Dreieck. Der Flächeninhalt des Dreiecks soll doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms sein.
   Bestimme die Koordinaten des Punktes Z durch eine geeignete Rechnung.

Aufgabe 2

Linda kauft eine Hose und eine Bluse. Die Bluse kostet 10,50€ mehr als das Doppelte der Hose. Für beide Kleidungsstücke zusammen zahlt Linda 160,35€.
Berechne die Einzelpreise.

2. Systeme linearer Gleichungen

Aufgabe 1

a. Löse das LGS mit Hilfe eines Verfahrens deiner Wahl und mache danach die Probe.
   Die Taschenrechnerlösung reicht nicht!

$$\begin{aligned} &\text{I)} & 4x + 10y &= 5 \\ &\text{II)} & -8x + 10y &= 35 \end{aligned}$$

b. Löse das oben in a. stehende Gleichungssystem graphisch. Beschreibe deine Vorgehensweise.

c. Vereinfache zunächst die Gleichungen des linearen Gleichungssystems und löse dieses System dann mit Hilfe des Additionsverfahrens. Gib die Lösungsmenge an.

$$\begin{aligned} &\text{I)} & (2x-1)^2 + 2 \cdot (y+1) &= 4x^2 \\ &\text{II)} & (x+1) \cdot (y-1) + 4x &= xy - 5y - 2,5 \end{aligned}$$

d. Löse das lineare Gleichungssystem. Die Lösungsvariablen seien x und y, die Formvariable sei k.

$$\begin{aligned} &\text{I)} & 5x - 2ky &= 5 \\ &\text{II)} & 10x + ky &= -5 \end{aligned}$$

   Welche Bedingung muss die Formvariable k erfüllen, damit das Gleichungssystem genau eine Lösung hat?

Aufgabe 2

a. Bei einem Straßenfest kann man an einem Stand Wasser, Bier und Wein in Flaschen kaufen. Die Standbetreiber verdienen an einer Flasche Wasser 2,20€, an einer Flasche Bier 1,40€ und an einer Flasche Wein 10,10€.
Am Ende des Festes beträgt der Gewinn 456,90€. Insgesamt wurden 178 Flaschen verkauft. Dabei betrug die Anzahl der verkauften Flaschen Wasser nur die Hälfte der Anzahl der verkauften Flaschen Bier.
Berechne die Anzahl der verkauften Flaschen für die drei Getränke.

b. Ein langer Güterzug hat 21 Wagen mit zusammen 58 Achsen. Die Wagen haben entweder zwei Achsen oder vier Achsen.
Bestimme die Anzahl der zweiachsigen und der vierachsigen Wagen.

3. Reelle Zahlen

Aufgabe 1

a. Berechne möglichst einfach. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{0{,}5} \cdot \sqrt{32} =$ 2. $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{0{,}5}} =$ 3. $\sqrt{\dfrac{125}{x^2}} : \sqrt{\dfrac{64y^2}{5}} =$

b. Ziehe teilweise die Wurzel. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{1331} =$ 2. $\sqrt{1{,}69x^3y} =$

c. Mache den Nenner rational. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{60}} =$ 2. $\dfrac{5a\sqrt{a}}{\sqrt{25a}} =$

Aufgabe 2

Löse die beiden Wurzelgleichungen und mache die Probe.
Gib danach die Lösungsmenge an.

a. $\sqrt{x+3} = 9 - x$

b. $3 \cdot (x-2) = x + 1 + \sqrt{x+4}$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Parabeln p_1 und p_2 mit den Funktionsgleichungen

p_1: $y = x^2 - x - 6$ und p_2: $y = -0{,}2x^2 + 0{,}2x + 8{,}4$

a. Berechne für die Parabeln p_1 und p_2 die Schnittpunkte mit den beiden Achsen. Wähle geeignete Namen für diese Schnittpunkte.
b. Bestimme die Scheitelpunkte E_1 und E_2 der Parabeln.
c. Zeichne die Parabeln p_1 und p_2 in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
d. Die beiden Parabeln schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2. Berechne diese Schnittpunkte.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen können wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, mit der pq-Formel oder mit der abc-Formel lösen.

abc-Formel	**pq-Formel**
$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$
$\boxed{\mathbf{x_{1/2}} = \quad}$	$\boxed{\mathbf{x_{1/2}} = \quad}$

Gegeben ist nun die quadratische Gleichung $2x^2 + 28x + 90 = 0$.

a. Löse die Gleichung mit der abc-Formel. $\boxed{a = \quad}$ $\boxed{b = \quad}$ $\boxed{c = \quad}$

b. Löse die Gleichung mit der pq-Formel. Bringe die Gleichung zuerst auf die Normalform.

Normalform : ______________________ $\boxed{p = \quad}$ $\boxed{q = \quad}$

Aufgabe 3

Löse die Gleichungen mit der abc-Formel oder mit der pq-Formel.
a. $4x^2 - 30x - 150 = 7x^2 + 27x + 60$ b. $(y-12)(y+12) = 228 - y(y+50)$

Aufgabe 4

Verlängert man bei einem Würfel jede Kante um 1cm, so vergrößert sich das Würfelvolumen um 217cm^3. Berechne die ursprüngliche Kantenlänge des Würfels.

5. Potenzen

1. Berechne bzw. vereinfache. Wende die Potenzgesetze an.
   a. $-1{,}2 \cdot 3^{11} + 7{,}8 \cdot 3^{11}$ b. $3{,}4^9 : 3{,}4^2$
   c. $(2^{-3})^7$ d. $(m^{9ab})^{2{,}5ab}$

e. $4^{abc} \cdot 2{,}5^{abc}$

f. $\dfrac{36^{2k}}{125^{4k}} : \dfrac{12^{4k}}{25^{2k}}$

g. $\sqrt[3]{(u+v)^4} + \sqrt[3]{(u-v)^2\,(u^2-v^2)}$

2. Berechne und formuliere (auch in Worten) das zugehörige allgemeine Potenzgesetz.

a. $b^{6y+5} \cdot b^{3-7y}$

b. $\dfrac{(3x^2-12)^3}{27(x-2)^3}$

3. Berechne mit dem Taschenrechner und gib das Ergebnis in der Normdarstellung an. Runde dabei auf 3 Stellen nach dem Komma.

$$\frac{1{,}83 \cdot \sqrt[3]{17{,}1} - 2{,}8^{0,2}}{(\sqrt[4]{10{,}5}-3)^2 + 0{,}72} =$$

6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Wir betrachten Funktionen des Typs $f: x \mapsto a x^n \quad ; \quad x \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

a. Gegeben sind die Funktionen f_1 bis f_5 .

$f_1 : x \mapsto -0{,}5\,x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto 0{,}3x^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto -\frac{1}{10}x^3 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \frac{1}{20}x^4 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto -\frac{1}{50}x^5 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

Lege eine Wertetabelle an und zeichne die Schaubilder der Funktionen f_1 bis f_5 in ein geeignetes Koordinatensystem. Du kannst die Tabelle auch mit Hilfe deines Taschenrechners erzeugen.

b. Nenne Eigenschaften der oben stehenden Funktionen.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = \dfrac{2}{x-1}$ und f_2 mit $f_2(x) = -0{,}15^x$.

a. Definitionsmengen f_1 : $\boxed{D_1 = \quad}$ f_2 : $\boxed{D_2 = \quad}$

b. Lege eine Wertetabelle an und zeichne danach die Schaubilder in ein gemeinsames Koordinatensystem. Du kannst auch hier die Tabelle mit Hilfe deines Taschenrechners erzeugen.

c. Beschreibe für beide Funktionen das Verhalten der Schaubilder für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 1$.

7. Wachstumsprozesse

Aufgabe 1

Es liege ein exponentieller Wachstumsprozess vor. Bestimme jeweils den Wachstumsfaktor q für die folgenden Wachstumsangaben pro Zeiteinheit :

a. 215 % q =

c. eine Zunahme um drei Fünftel q =

b. 0,2 % q =

d. eine Abnahme um zwei Drittel q =

Aufgabe 2

Annika und Lisa wollen nach dem Abitur eine große Reise machen. Zu Beginn der 5. Klasse beschlossen sie bereits einen Sparplan, den sie immer noch einhalten:
In der 5. Klasse sparen beide jeweils 300€.
Annika: In jedem neuen Schuljahr will sie 40€ mehr sparen.
Lisa: In jedem neuen Schuljahr will sie 10% mehr als im alten Schuljahr sparen.

a. Gib die Gleichungen für die jährlichen Sparraten an.
   Wie nennt man diese Wachstumsarten?
b. Zeichne die Entwicklung der Sparraten in ein geeignetes Koordinatensystem.
   In welchem Jahr sparen Annika und Lisa etwa gleich viel?
c. Wie viel Geld haben Annika und Lisa am Ende der 10. Klasse jeweils gespart?
   Wie viel Geld werden sie bis zum Abitur gespart haben?
d. Annika und Lisa denken daran, diese Sparpläne noch viele Jahre beizubehalten.
   Wann hätten beide jeweils eine Sparrate von 3000€ pro Jahr erreicht?

8. Exponential- und Logarithmengleichungen

Aufgabe 1

Löse die folgenden Gleichungen. Runde auf 4 Dezimalen.

a. $13{,}5^{x} = 1500$

b. $13^{-x} = 3000$

c. $1{,}2 \cdot 9{,}2^{x} = 333{,}45$

d. $9{,}3 \cdot 1{,}95^{3x-1} = 60{,}5$

Die Basis der Logarithmen sei 10.

e. $\lg(2 + 1{,}8x) = 1{,}7$

f. $\lg(x^2 - x) - \lg(x - 1) = 2$

Aufgabe 2

Im Jahr 0 unserer Zeitrechnung soll es an einem Ort 100g radioaktives Radium Ra-226 gegeben haben. Diese Menge nahm nur durch radioaktiven Zerfall ab. Die Halbwertszeit des Ra-226 beträgt 1600 Jahre.

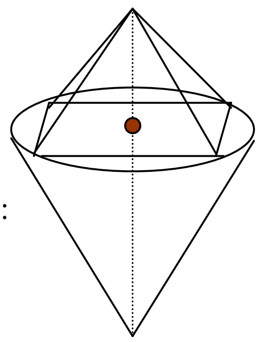
a. Was versteht man unter dem Begriff Halbwertszeit ?
b. Bestimme den Wachstumsfaktor q. Dokumentiere alle Rechenschritte.
   [zur Kontrolle : 0,9995668768]
c. Berechne die heute noch vorhandene Menge Ra-226.
   Wie viel g Ra-226 gab es 10000 Jahre vor Christi Geburt?
d. Zeige durch geeignete Umformungen:
   Man kann die Menge des jeweils vorhandenen Ra-226 auch mit der folgenden Gleichung bestimmen.

$$m(t) = m_o \cdot 2^{-\frac{t}{1600}} \quad , \text{ t in Jahren}$$

9. Flächen- und Körperberechnungen

Aufgabe 1

Gegeben ist der folgende Körper :



Die quadratische Pyramide hat die Höhe $h_{Pyr} = 4$ cm.
Der Kegel hat die Grundfläche G = 20 cm².
Der Kegel ist doppelt so hoch wie die Pyramide.

Trage zunächst die Bezeichnungen für alle wichtigen Größen ein :

Radius r des Kegels, Grundseitenlänge a der Pyramide,
Seitenkante s_{Pyr} der Pyramide, Höhe der Pyramide h_{Pyr},
Höhe eines Seitendreiecks h_1,
Höhe des Kegels h_{kegel} , Mantellinie s_{Kegel}

Berechne die folgenden Größen zunächst allgemein. Setze dann die angegebenen Maßzahlen ein.
Gesucht : r, a, s_{pyr} , h_1, s_{Kegel} , Volumen V des Körpers, Oberfläche O des Körpers

Aufgabe 2

Ein zylinderförmiges Benzinfass habe einen Durchmesser von 90cm und eine Höhe von 1,3m.

a. Fertige eine Skizze des Fasses an. Wie viel Liter Benzin fasst es?
b. Das Metallfass hat die Masse 10 kg. Benzin hat die Dichte $\rho = 0{,}72 \; \frac{kg}{l}$.
   Berechne die Gesamtmasse des gefüllten Fasses.
c. Um wie viel % verkleinert sich das Volumen des Fasses, wenn man die Höhe und den Durchmesser halbiert?

10. Trigonometrie

Aufgabe 1

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen für die Seiten und Winkel.
a = 6cm, c = 7cm, β = 120° .

a. Konstruiere das Dreieck ABC.
b. Berechne die übrigen Winkelgrößen und die Seitenlänge b
c. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

<u>Aufgabe 2</u>

Die Corcovado-Bergbahn in Rio de Janeiro fährt ausgehend von 40m über dem Meeresspiegel auf den 680m hohen Berg Corcovado. Die mittlere Steigung beträgt 16,7%.

a. Welcher Steigungswinkel ergibt sich aus den oben genannten Daten ?
   Welche Streckenlänge ergäbe sich bei einer geradlinigen Schienenstrecke ?

b. Die maximale Steigung dieser Strecke beträgt 30%. Welche Höhendifferenz kann die Bahn bei einer Streckenlänge von 1000m überwinden ?

Unterstütze deine Rechnungen durch geeignete Skizzen.

.<u>Aufgabe 3</u>

Zeichne einen Einheitskreis [1 LE $\hat{=}$ 3 cm] .
Zeichne den Winkel $\alpha = 120°$.

a. Markiere in der Zeichnung, wo man $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$ ablesen kann.

b. Begründe mit Hilfe der Zeichnung: $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

c. Zeichne einen weiteren Einheitskreis. Zeichne den Winkel $\alpha = 60°$.
   Begründe mit Hilfe der Zeichnung: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

d. Vereinfache den Term $\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha$

e. Zeige mit Hilfe einer Skizze: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

f. Vereinfache die Gleichung und bestimme dann eine Lösung für α.

$$\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha} = 2\cos\alpha$$