Fachberatung Mathematik
Hilde Zirkler
Goethe-Gymnasium Bensheim Bensheim, im Juni 2009

Übergang Klasse 10 / Klasse 11
Mathematik

Übungsaufgaben zum Mittelstufenstoff im Fach Mathematik

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen
2. Systeme linearer Gleichungen
3. Reelle Zahlen
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
5. Potenzen
6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen
7. Wachstumsprozesse
8. Exponential- und Logarithmengleichungen
9. Flächen- und Körperberechnungen
10. Trigonometrie

Lernhilfen

- Die eingeführten Mathematikbücher der Klassen 8, 9 und 10
  Alle anderen Schulbücher zu diesen Klassenstufen (z.B. aus den Verlagen Klett, Schroedel, Cornelsen, bsv, …)
- Lernhilfen der Verlage (z.B. Training Mathematik aus dem Klett Verlag, Trainingshefte von Schroedel, Cornelsen, Nachschlagewerke von Duden-Paetec, …)
- Formelsammlungen Mathematik (z.B. Formelsammlung „Das große Tafelwerk“ – Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II für die Fächer Mathematik, Informatik, Astronomie, Physik, Chemie, Biologie aus dem Cornelsen Verlag; das entsprechende Werk aus dem Verlag Duden-Paetec; Formelsammlungen Mathematik von Duden, Schroedel, Klett, …)

Termine

1. Bearbeitung der Aufgaben bis zum 7.September 2009
2. Bekanntgabe der Lösungen ab 7. September 2009 durch die Fachlehrer
   (auch bei: www.mathe-fachberater.de)
3. Vorläufiger Termin für den Test: Montag, 14. September 2009, 3./4. Stunde

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen; Terme

Aufgabe 1

a. Begründe: Der Graph einer linearen Funktion g mit $g(x) = mx + n$ ist eine Gerade durch die Punkte P(0|n) und Q(1|m+n).
b. Gib mit Hilfe der Aussage in a. die Gleichung der linearen Funktion g an, deren Graph die Punkte P(0|4) und Q(1|7) enthält.
c. Gegeben ist nun das Dreieck ABC mit A(1|5), B(4|2) und C(6|8).
   - Zeichne das Dreieck ABC in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
   - Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B.
   - Bestimme rechnerisch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.
     Nenne diese Punkte $M_{\overline{AC}}$ und $M_{\overline{BC}}$. Erläutere deine Vorgehensweise.
   - Zeige: Die Gerade durch die Punkte $M_{\overline{AC}}$ und $M_{\overline{BC}}$ ist parallel zur Geraden durch die Punkte A und B.
   - Zeichne die beiden genannten Geraden ebenfalls in das Koordinatensystem ein.

d. Bestimme den Umfang des Dreiecks ABC.

Aufgabe 2

a. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 120cm. Jeder Schenkel ist 10% länger als die Basis. Bestimme die drei Seitenlängen.
b. Ein Rechteck hat ebenfalls den Umfang 120cm. Zwei benachbarte Seitenlängen verhalten sich wie 3 : 5. Bestimme die Längen der Rechtecksseiten.

2. Systeme linearer Gleichungen

Aufgabe 1

a. Löse das LGS mit Hilfe eines Verfahrens deiner Wahl und mache danach die Probe. Die Taschenrechnerlösung reicht nicht!

   I) $7x - 5y = 138$
   II) $13x + 25y = -258$

b. Vereinfache zunächst die Gleichungen des linearen Gleichungssystems und löse dieses System dann mit Hilfe des Additionsverfahrens. Gib die Lösungsmenge an.

   I) $9x^2 - 17 = (3x + 2)^2 - 5 \cdot (2y - 1)$
   II) $(2x + 3) \cdot (y - 4) - 3y = 2 \cdot (x-1)(y+3) + 2 \cdot (3 - 4y)$

d. Löse das lineare Gleichungssystem. Die Lösungsvariablen seien x und y, die Formvariable sei t.

   I) $tx - 4y = 10$
   II) $3x - 8y = 5$

   Welche Bedingung muss die Formvariable t erfüllen, damit das Gleichungssystem genau eine Lösung hat?

Aufgabe 2

a. Im Zusammenhang mit einer Flurbereinigung hat man für ein rechteckiges Grundstück zwei Optionen: Verlängert man die größere Seite um 3m und die kleinere Seite um 2m, dann vergrößert sich der Flächeninhalt um $151m^2$.
Verkürzt man die längere Seite um 1m und die kleinere Seite um 2m, dann nimmt der Flächeninhalt um $93m^2$ ab.
Bestimme Länge, Breite und Flächeninhalt des ursprünglichen Grundstücks.

b. In zwei Vorratsbehältern mit Losen für eine Tombola befinden sich insgesamt 500 Lose. In einem Vorratsbehälter beträgt der Anteil der Gewinnlose 10%, im anderen Behälter 20%. Schüttet man die Lose aus beiden Behältern in die Lostrommel, erhält man 18% Gewinnlose.
Wie viele Lose befanden sich vor dem Zusammenschütten in den beiden Behältern?

3. Reelle Zahlen

Aufgabe 1

a. Berechne möglichst einfach. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{270} =$ 2. $\frac{\sqrt{270}}{\sqrt{0,3}} =$ 3. $\sqrt{\frac{7}{11a^2}} : \sqrt{\frac{343b^2}{1331a^4}} =$

b. Ziehe teilweise die Wurzel. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\sqrt{245} =$ 2. $\sqrt{2,89a^3b} =$

c. Mache den Nenner rational. Schreibe alle Umformungen auf.

1. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{72}} =$ 2. $\frac{3b\sqrt{b}}{\sqrt{9ab^3}} =$

Aufgabe 2

Löse die beiden Wurzelgleichungen und mache die Probe.
Gib danach die Lösungsmenge an.

a. $\sqrt{x-32} = \sqrt{x} - 2$

b. $x^2 + 1 = (x+1)^2 - \sqrt{2x^2 + 20x - 18}$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Parabel p_1 mit der Funktionsgleichung: $p_1(x) = 0,25x^2 - 1,75x + 1,5$.

Die Parabel p_2 schneidet die x-Achse in den Punkten $N_1(-1|0)$ und $N_2(5|0)$.

Der Scheitelpunkt der Parabel p_2 ist $S(2|3)$.

a. Berechne für die Parabel p_1 die Schnittpunkte mit den beiden Achsen und den Scheitelpunkt. Wähle geeignete Namen für diese Punkte.
b. Bestimme eine Gleichung für die Parabel p_2.
c. Zeichne die Parabeln p_1 und p_2 in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
d. Die beiden Parabeln schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2.
   Berechne diese Schnittpunkte.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen können wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, mit der pq-Formel oder mit der abc-Formel lösen.

abc-Formel	**pq-Formel**
$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$
$\mathbf{x_{1/2}} =$	$\mathbf{x_{1/2}} =$

Gegeben ist nun die quadratische Gleichung $102x^2 + 357x - 765 = 0$.

a. Löse die Gleichung mit der abc-Formel. a = b = c =

b. Löse die Gleichung mit der pq-Formel. Bringe die Gleichung zuerst auf die Normalform.

Normalform : ____________________ p = q =

Aufgabe 3

Löse die Gleichungen.

a. $\dfrac{x^2 + 10x - 5}{2x - 5} = x + 3$ b. $z(z+1) + z^2 + z = 2(z+1)(z-1) + 24$

Aufgabe 4

Bei einem Quader ist die Breite um 10cm kleiner als die Höhe und die Länge um 20cm größer als die Höhe. Die Oberfläche des Quaders beträgt $0{,}62\,m^2$. Berechne die Kantenlängen des Quaders.

5. Potenzen

1. Berechne bzw. vereinfache. Wende die Potenzgesetze an.

a. $11{,}5 \cdot 2^{11} - 4{,}3 \cdot 2^{11}$

b. $8{,}5^{7} : 8{,}5^{9}$

c. $(9^{-6})^{3}$

d. $(k^{3xy})^{3{,}5xy}$

e. $8^{xyz} \cdot 6{,}25^{xyz}$

f. $\dfrac{1{,}44^{3ab}}{2{,}1^{2ab}} : \dfrac{1{,}2^{3ab}}{2{,}52^{2ab}}$

g. $\sqrt{(a+b)(a^2-b^2)} + \sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$

2. Berechne mit dem Taschenrechner und gib das Ergebnis in der Normdarstellung an. Runde dabei auf 3 Stellen nach dem Komma.

$$\frac{(3{,}8-\sqrt[3]{1{,}5})\cdot 50 - 4{,}3^{-2}}{0{,}1\cdot(\sqrt[3]{1{,}5}-3{,}8)^2 + 0{,}5\cdot 0{,}9}$$

6. Potenzfunktionen / Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Wir betrachten Funktionen des Typs $f: x \mapsto a x^n$; $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

a. Gegeben sind die Funktionen f_1 bis f_5.

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{3}x$; $x \in \mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{3}x^2$; $x \in \mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \frac{1}{30}x^3$; $x \in \mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{40}x^4$; $x \in \mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \frac{1}{50}x^5$; $x \in \mathbb{R}$

Lege eine Wertetabelle an und zeichne die Schaubilder der Funktionen f_1 bis f_5 in ein geeignetes Koordinatensystem. Du kannst die Tabelle auch mit Hilfe deines Taschenrechners erzeugen.

b. Nenne Eigenschaften der oben stehenden Funktionen.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = \dfrac{2}{1-2x}$ und f_2 mit $f_2(x) = 0{,}6^x$.

a. Definitionsmengen f_1 : $\boxed{D_1 = \quad}$ f_2 : $\boxed{D_2 = \quad}$

b. Lege eine Wertetabelle an und zeichne danach die Schaubilder in ein gemeinsames Koordinatensystem. Du kannst auch hier die Tabelle mit Hilfe deines Taschenrechners erzeugen.

c. Beschreibe für beide Funktionen das Verhalten der Schaubilder für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 0{,}5$.

7. Wachstumsprozesse

Aufgabe 1

Es liege ein exponentieller Wachstumsprozess vor. Bestimme jeweils den Wachstumsfaktor q für die folgenden Wachstumsangaben pro Zeiteinheit :

a. 100 % q = c. eine Zunahme um drei Achtel q =

b. 25 % q = d. eine Abnahme um die Hälfte q =

Aufgabe 2

Bei konstant bleibender Temperatur gilt für den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe über einer bestimmten Starthöhe näherungsweise die „barometrische Höhenformel“:

$p(h) = p_o \cdot 0{,}88^h$; h wird in der Einheit km eingesetzt

[Hinweis: Für größere Höhendifferenzen muss die Temperaturänderung in der Formel berücksichtigt werden.]

a. Erkläre die Bedeutung der Größe p_o.
b. Bestimme den Luftdruck auf dem Gipfel des Melibokus (517m über Meereshöhe), wenn der Luftdruck auf Meereshöhe mit 1013,25hPa angenommen wird.
c. Nimmt der Luftdruck beim Abstieg vom Melibokus nach Zwingenberg zu oder ab? Begründe deine Antwort.
d. Der Luftdruck betrage nun 980hPa. Berechne die zugehörige Höhe über Meereshöhe.
e. Wie muss man mit der Formel rechnen, wenn man vom Druck auf dem Melibokus ausgeht und den Druck auf Meeresniveau berechnen will? Erläutere deinen Ansatz.

8. Exponential- und Logarithmengleichungen

Aufgabe 1

Löse die folgenden Gleichungen. Runde auf 4 Dezimalen. TR-Lösungen genügen nicht!!!

a. $100 = 2{,}5^x$ b. $100 = 2{,}5^{-x}$ c. $100 = 2{,}5 \cdot 2{,}5^x$

d. $25{,}25 \cdot 2{,}5^{2{,}5x-5} = 2500$

Die Basis der Logarithmen sei 10.

e. $\lg(10 + 3x) = 2{,}5$ f. $\lg(2x + 1) + \lg(2x - 1) = 4$

Aufgabe 2

Gammastrahlung ist gefährlich für den menschlichen Körper. Bei Experimenten mit dieser Strahlung schirmt man die Strahlenquelle durch Bleiplatten ab. Die Intensität der Gammastrahlung nimmt exponentiell mit der Dicke der Bleiplatten ab. Für die Intensität der Gammastrahlung in Abhängigkeit von der Dicke d der Bleiplatten gilt:

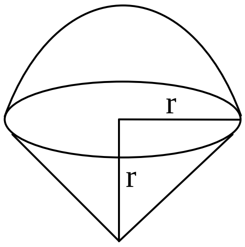
$I(d) = I_o \cdot 10^{-0{,}201d}$; die Dicke d wird in cm angegeben

a. Erkläre auch hier die Bedeutung der Größe I_o.
b. Berechne die „Halbwertsdicke" d, bei der die Intensität der Strahlung auf die Hälfte ihres Anfangswertes abgenommen hat.

9. Flächen- und Körperberechnungen

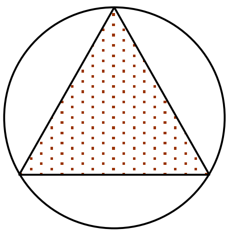
Aufgabe 1

Gegeben ist der folgende Körper: Ein Kegel mit aufgesetzter Halbkugel



a. Bestimme das Volumen des Körpers in Abhängigkeit von r.
b. Bestimme die Oberfläche des Körpers in Abhängigkeit von r.
c. Bestimme die Gesamtoberfläche der getrennten Körper. Um wie viel Prozent ist diese Oberfläche größer als die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers?
d. Berechne den Wert für r so, dass sich für den zusammengesetzten Körper eine Oberfläche von $100 cm^2$ ergibt.

Aufgabe 2



Dem Kreis mit dem Radius r ist ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben.
Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von r.

10. Trigonometrie

Aufgabe 1

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen für die Seiten und Winkel.
$c = 6cm$, $h_c = 4cm$, $\alpha = 40°$.

a. Konstruiere das Dreieck ABC.
b. Berechne die übrigen Winkelgrößen und die Seitenlängen a und b.

Aufgabe 2

Steigung einer Straße in Zwingenberg (Google Earth)

Die Markierungen im Bild haben den Horizontalabstand 94,36m. Der Höhenunterschied beträgt 4m. Die Straße verläuft in diesem Abschnitt geradlinig.

a. Bestimme den Steigungswinkel des Straßenabschnitts mit Hilfe der oben angegebenen Daten.
   Gib die Steigung des Straßenabschnitts in % an.
   Bestimme die Länge des Straßenstücks.
b. Ein anderer Straßenabschnitt hat die Steigung 16%.
   Bestimme die Höhendifferenz, die man bei einer Streckenlänge von 40m überwindet.
   Zusatzfrage für Schüler aus Zwingenberg: Um welches Straßenstück (in der Nähe des Bildausschnitts) könnte es sich hier handeln?

   Unterstütze deine Rechnungen durch geeignete Skizzen.

.Aufgabe 3

Zeichne einen Einheitskreis [1 LE $\hat{=}$ 4 cm] .
Zeichne den Winkel $\alpha = 60°$.

a. Markiere in der Zeichnung, wo man $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ablesen kann.
b. Gegeben sind die Funktionen f_1 und f_2 mit $f_1(x) = \sin x$ und $f_2(x) = \cos x$.
   Zeichne die Schaubilder (Graphen) von f_1 und f_2 in geeignete Koordinatensysteme.
   Die Schaubilder sollen für das Intervall $[-\pi ; 4\pi]$ gezeichnet werden.
   Gib mit Hilfe des Einheitskreises alle Schnittpunkte der beiden Schaubilder mit der x-Achse, die Hoch- und die Tiefpunkte an. Hier sollen die exakten Koordinaten der Punkte angegeben werden (z.B. $P(\pi|0)$).
c. Zeige: $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
d. Bestimme durch geeignete Rechnung eine Lösung für α.
   1. $\tan\alpha = \sin\alpha$
   2. $\tan\alpha = \cos\alpha$ (nicht ganz leicht !!!)