Fachberatung Mathematik
Hilde Zirkler
Goethe-Gymnasium Bensheim Bensheim, im Juni 2013

Übergang Klasse 10/E1 (G9) und Klasse 9/E1 (G8)
Mathematik

Übungsaufgaben zum Mittelstufenstoff im Fach Mathematik

a. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen
b. Systeme linearer Gleichungen
c. Reelle Zahlen
d. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
e. Potenzen
f. Potenzfunktionen
g. Flächen- und Körperberechnungen
h. Trigonometrie

Lernhilfen

- Die eingeführten Mathematikbücher der Klassen 7, 8, 9 (und 10)
  Alle anderen Schulbücher zu diesen Klassenstufen (z.B. aus den Verlagen Klett, Schroedel, Cornelsen, bsv, …)
- Lernhilfen der Verlage (z.B. Training Mathematik aus dem Klett Verlag, Trainingshefte von Schroedel, Cornelsen, Nachschlagewerke von Duden-Paetec, …)
- Formelsammlungen Mathematik (z.B. Formelsammlung „Das große Tafelwerk" – Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II für die Fächer Mathematik, Informatik, Astronomie, Physik, Chemie, Biologie aus dem Cornelsen Verlag; das entsprechende Werk aus dem Verlag Duden-Paetec; Formelsammlungen Mathematik von Duden, Schroedel, Klett, …)
- Übungsaufgaben und Tests der vergangenen Jahre bei www.mathe-fachberater.de

Termine

1. Bearbeitung der Aufgaben bis zum 30. August 2013
2. Bekanntgabe der Lösungen ab 30. August 2013 durch die Fachlehrer
   (auch bei: www.mathe-fachberater.de)
3. Vorläufiger Termin für den Test: Freitag, 6. September 2013, 3./4. Stunde

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen; Terme

Aufgabe 1

Gegeben sind die Geraden g, h und k.
Die Gerade g enthält den Punkt C(2|2) und hat die Steigung $-\frac{4}{3}$.
Die Gerade h enthält ebenfalls den Punkt C(2|2) und hat den y-Achsenabschnitt 0,5.
Die Gerade k hat die Gleichung $y = -\frac{1}{7}x - \frac{9}{7}$.
Die drei Geraden schließen ein Dreieck ein.

a. Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g und h.
b. Zeichnen Sie die Geraden g, h und k in ein geeignetes Koordinatensystem.
c. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der drei Geraden rechnerisch.
d. Zeigen Sie: Das eingeschlossene Dreieck ist gleichschenklig.
   Das eingeschlossene Dreieck ist auch rechtwinklig.
e. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des eingeschlossenen Dreiecks.

Aufgabe 2

Daniela und Miriam wollen ihren Urlaub auf einem Kreuzfahrtschiff genießen. Sie favorisieren zwei Anbieter.

Anbieter A: 12 Tage Kreuzfahrt für 879€ und zusätzlich 783€ für den Flug.

Anbieter B: 3 Tage länger an Bord, der Flug ist eingeschlossen und der Preis liegt 15% über dem des Anbieters A.

Nehmen Sie an, beide Anbieter kalkulieren mit den gleichen Kosten pro Tag an Bord.

a. Welches Angebot ist nach dem Prinzip Preis-Leistung günstiger? Entwerfen Sie ein Entscheidungskriterium und rechnen Sie dann damit.

b. Bei beiden Anbietern kann man tageweise verlängern.
   Geben Sie die Kostenfunktionen an.

2. Systeme linearer Gleichungen

Aufgabe 1

a. Lösen Sie das LGS mit Hilfe eines Verfahrens Ihrer Wahl und machen Sie danach die Probe. Die Taschenrechnerlösung reicht nicht!

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 16x + \frac{1}{3}y = -4x + \frac{1}{8}y \\ \text{II)} \quad & 5x + 11 + y = -3x \end{aligned}$$

b. Vereinfachen Sie auch hier zunächst die Gleichungen des linearen Gleichungssystems und lösen Sie dieses System dann mit Hilfe des Additionsverfahrens.
Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 3y - 4 \cdot (x - y) = \frac{1}{2} \cdot (6x + 35) + 28 \\ \text{II)} \quad & 10x + 3y = 35 - 18x \end{aligned}$$

c. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem. Die Lösungsvariablen seien x und y, die Formvariable sei k.

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \tfrac{1}{4}x + ky = 3k \\ \text{II)} \quad & x - 2ky = 6 \end{aligned}$$

Welche Bedingung muss die Formvariable k erfüllen, damit das Gleichungssystem genau eine Lösung hat? Geben Sie diese Bedingung an.

Aufgabe 2

Eine Schulklasse will für ein Abschlussfest bei einem Pizza-Heimservice Pizzen, Salate und alkoholfreie Getränke bestellen. Eine Pizza, ein Salat und ein Getränk kosten zusammen 11,40€. Das ist den Schülern zu viel und zu teuer. Wenn Sie 30 Pizzen, 10 Salate und 15 Getränke bestellen, dann müssen sie 210,50€ bezahlen. Kommen sie dem Wunsch der Mädchen nach und bestellen nur die Hälfte der Pizzen, dafür aber doppelt so viele Salate, dann zahlen sie bei gleicher Getränkezahl nur 196,00€.

Berechnen Sie die Einzelpreise für eine Pizza, einen Salat und ein Getränk.
(Es gibt nur eine Pizza-Sorte und einen Einheitssalat, alle Getränke haben den gleichen Preis.)

3. Reelle Zahlen

Aufgabe 1

a. Vereinfachen Sie die Terme.

1. $\sqrt{\frac{1}{4}kc} \; : \; \sqrt{\frac{c^3}{12k^3}} \; =$

2. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{\frac{1}{5}}} =$

b. Machen Sie den Nenner rational. Schreiben Sie alle Umformungen auf.

1. $\dfrac{20 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$

2. $\dfrac{3k\sqrt{3k^3c^2}}{\sqrt{27(kc)^5}} =$

Aufgabe 2

Lösen Sie die beiden Gleichungen und machen Sie die Probe.
Geben Sie danach die Lösungsmenge an.

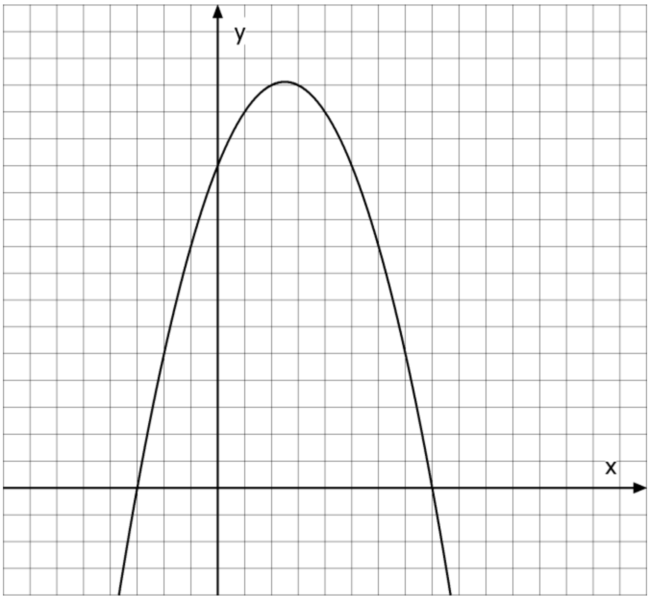
a. $2\sqrt{9x+1} \; = \; x+9$

b. $\dfrac{3x}{x^2-4} = 1$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Parabeln p_1 und p_2 mit den Funktionsgleichungen
$p_1(x) = -2x^2 + 5x + 12$ und $p_2(x) = 0{,}5x^2 + 4{,}5$
Die Parabel p_1 ist im unten stehenden Koordinatensystem dargestellt.



a. Skalieren Sie die Achsen des Koordinatensystems.

b. Zeichnen Sie die Parabel p_2 in das oben stehende Koordinatensystem ein.

c. Bestimmen Sie für die Parabeln p_1 und p_2 die Schnittpunkte mit der x- Achse.
Bestimmen Sie auch für beide Parabeln den jeweiligen Scheitelpunkt.
(Ablesen aus dem Schaubild genügt hier natürlich nicht!)

d. Die Parabel p_1 und p_2 schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

e. Geben Sie die Gleichung einer weiteren Parabel p_3 an, die die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse hat wie die Parabel p_1.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen können wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, mit der pq-Formel oder mit der abc-Formel lösen.

abc-Formel: $a x^2 + b x + c = 0$ **pq-Formel:** $x^2 + p x + q = 0$

$\mathbf{x_{1/2}}$ =

$\mathbf{x_{1/2}}$ =

Lösen Sie die Gleichung ohne TR: $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$

Aufgabe 3

Die **Maria-Pia-Brücke** ist eine Eisenbahnbrücke über den Douro zwischen Porto und Vila Nova de Gaia. Diese Brücke besteht aus einem Zweigelenk-Bogen aus Metall, der eine Metallfahrbahn trägt. Die Gesamtlänge der schmiedeeisernen Bogenbrücke beträgt 352m, die doppelgleisige Eisenbahnstrecke auf ihrem Überbau verläuft etwa 61m über dem Wasser des Douro. Der Mittelbogen war mit einer Spannweite von 160m zum Zeitpunkt der Eröffnung 1877 der größte seiner Art.
[Angaben: Wikipedia]

Quelle: Wikipedia 2013

a. Nähern Sie den oberen Brückenbogen durch eine Parabel 2. Ordnung an.
Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an, die den Bogen beschreibt.
Die Höhe der Betonfundamente über der Wasseroberfläche betrage hier 9m.

b. Schätzen Sie die benötigten Daten so ab, dass Sie auch eine Gleichung für den unteren Parabelbogen angeben können.

5. Potenzen

1. Berechnen bzw. vereinfachen Sie. Wenden Sie die Potenzgesetze an.

   a. $2{,}8 \cdot 2^{8} + 2{,}8 \cdot 4^{4}$

   b. $5^{5} : 0{,}5^{5}$

   c. $(4^{-4})^{-4}$

   d. $(k^{(2m-n)})^{(n+2m)}$

   e. $(kc)^{m+1} \cdot (kc)^{-1}$

   f. $\dfrac{0{,}6^{9kc}}{3{,}6^{3kc}}$

2. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner und geben Sie das Ergebnis in der Normdarstellung an.
   Runden Sie dabei auf 3 Stellen nach dem Komma.

$$\frac{0{,}01 \cdot (\frac{3}{5} + \sqrt{3})^{1{,}5} - \frac{1}{3} \cdot 0{,}6^{-2}}{1{,}5 \cdot 4^{\frac{3}{8}} - (\sqrt[3]{2} + 12)^{3}}$$

6. Potenzfunktionen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktionen f_1 und f_2.

$$f_1 : x \mapsto \frac{3}{x+3} \qquad \text{und} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x+3}{3}$$

a. Geben Sie für beide Funktionen jeweils die maximale Definitions- und Wertemenge an. Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen f_1 und f_2 in ein geeignetes Koordinatensystem.

b. Untersuchen Sie die Schaubilder im Hinblick auf horizontale und vertikale Asymptoten. Falls Asymptoten vorhanden sind, geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

c. Die Schaubilder der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich. Berechnen Sie den oder die Schnittpunkte.

d. Die Funktionen f_1 und f_2 sollen nun in der allgemeinen Form mit

$$f_{1,a} : x \mapsto \frac{a}{x+a} \qquad \text{und} \qquad f_{2,a} : x \mapsto \frac{x+a}{a} \quad ; \; a > 0$$

betrachtet werden.

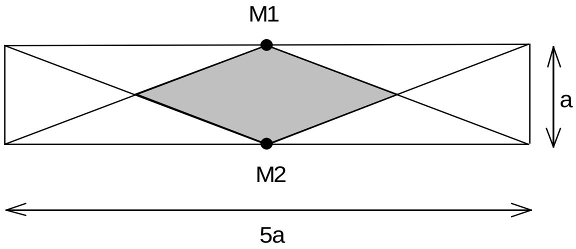
Untersuchen Sie die Schaubilder zu diesen Funktionen im Hinblick auf Schnittpunkte. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

7. Flächen- und Körperberechnungen

Aufgabe 1

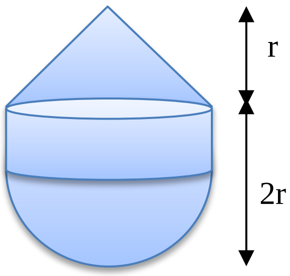
Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 5a und a.
M_1 und M_2 bezeichnen die Seitenmitten.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der grau gefärbten Figur in Abhängigkeit von a.



Aufgabe 2

Der gezeichnete Körper besteht aus einer Halbkugel, einem Kreiszylinder und einem geraden Kreiskegel.



a. Bestimmen Sie sie Oberfläche und das Volumen des Körpers in Abhängigkeit von r.

Der Körper wird normalerweise als Spielzeug aus einem leichten Plastikmaterial hergestellt, das z.B. auch in der Badewanne schwimmt.
Ein wohlhabendes Elternpaar denkt darüber nach, das Spielzeug für r = 4cm aus Gold anfertigen zu lassen.

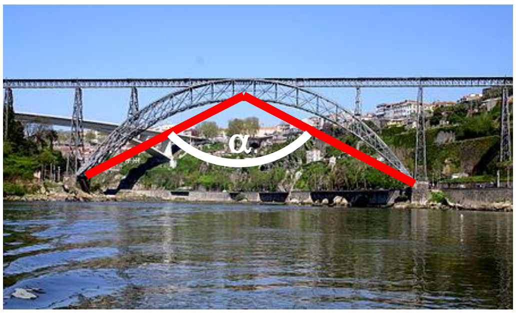
b. Ermitteln Sie den reinen Materialwert des Spielzeugs. Weitere benötigte Daten finden Sie in der Formelsammlung und im Internet.

c. Ist dieses Goldspielzeug noch für Kleinkinder geeignet? Begründen Sie kurz.

8. Trigonometrie

Aufgabe 1

Die Brücke von oben wird nun mit Wimpeln, die an gespannten roten Seilen hängen, geschmückt.



Berechnen Sie die Größe des Winkels α.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung: $\frac{1}{3}\cos^2(\alpha) = \frac{1-\sin^2(\alpha)}{4\cdot\sin^2(\alpha)}$

Hinweis: Ein Blick in die Formelsammlung kann helfen.

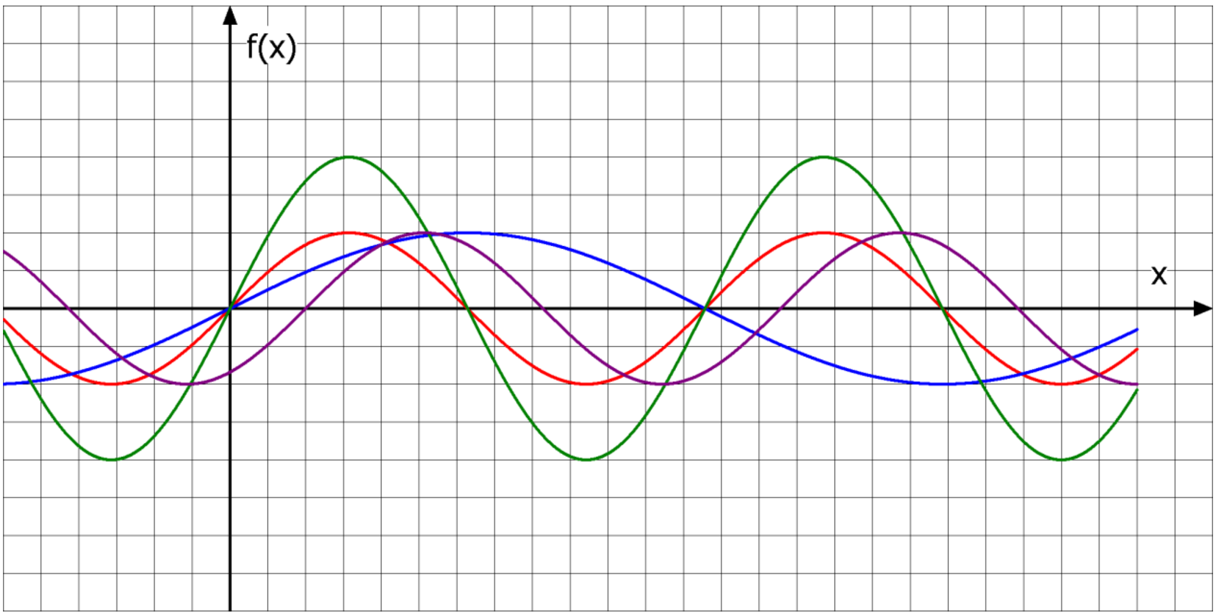
Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f_1 mit $f_1(x) = \sin(x)$.
Das Schaubild der Funktion f_1 ist im unten stehenden Koordinatensystem dargestellt.
Außerdem sind die Schaubilder der Sinusfunktionen f_2, f_3 und f_4 gezeichnet.

a. Skalieren Sie die Achsen des Koordinatensystems.

b. Geben Sie die Gleichungen der Funktionen f_2, f_3 und f_4 an.

Schaubilder zu Aufgabe 3



roter Graph: Funktion 1
blauer Graph: Funktion 2
grüner Graph: Funktion 3
lila Graph: Funktion 4